ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/Gestão – 1.º Semestre – Época de Recurso – Duração: 2 horas

1.ª Parte – Teórica **N.º de Exame: abcde** **28.01.2013**

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores). As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: ______________________________ N.º: ________

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

- **a)** Se A e B são independentes, então $P(A-B) = P(A) \times P(\bar{B})$ (**V**)
- **b)** Se $A \subset B$ e $P(B) > 0$, então $P(A) > 0$ (**F**)
- **c)** Se $A \subset B$ e $P(B) > 0$, então $P(A \mid B) \times P(B) = P(A)$ (**V**)
- **d)** Se $A \cup B = \Omega$, então A e B formam uma partição do espaço de resultados (**F**)

2. Considere uma v.a. X e a respectiva função de distribuição $F(x)$.

- **a)** Se X for contínua e ξ_α representar o correspondente quantil de ordem α, então $F(\xi_{0.85}) - F(\xi_{0.15}) = 0.7$ (**V**)
- **b)** Suponha que X é discreta com função probabilidade $f(x)$. Se $F(1) = 1$, então $f(x) = 0$ para $x > 1$ (**V**)
- **c)** Se X for contínua, então $F(x)$ é estritamente crescente (**F**)
- **d)** Se X for contínua com função densidade $f(x)$, então podemos afirmar que $0 \le f(x) \le 1$ para todo o x (**F**)

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias.

- **a)** Se X e Y forem identicamente distribuídas, $\text{Cov}(X,Y) \le \text{Var}(X)$ (**V**)
- **b)** $E(X+Y) = E[X] + E[Y] - \text{Cov}(X,Y)$ (**F**)
- **c)** Quando (X,Y) é discreta com função probabilidade conjunta $f(x,y)$, então podemos dizer que, para todo o par (x,y), $f(x,y) \le P(X=x)$ (**V**)
- **d)** Se X e Y forem independentes, então X^2 e Y^2 também o são (**V**)

4. Seja X uma variável aleatória.

- **a)** Se $X \sim t(4)$, então $P(-2.1 < X < 2.1) = 1 - 2\,P(X > 2.1)$ (**V**)
- **b)** Se $X \sim \text{N}(0,4)$, então $4X^2 \sim \chi^2(1)$ (**F**)
- **c)** Se $X \sim \text{B}(3, 0.2)$, $Y \sim \text{B}(3, 0.2)$ e $\text{Cov}(X,Y) = 0.05$, então $X+Y \sim \text{B}(6, 0.2)$ (**F**)
- **d)** Se X segue uma distribuição exponencial, então X é uma variável aleatória discreta (**F**)

VSFF

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual de tamanho $n > 2$ proveniente de uma população X, e denote-se por $\bar{X}$ a respectiva média amostral.

a) Se $X \sim \text{Po}(\lambda)$ e $n = 3$, então a distribuição de $\bar{X}$ pode ser bem aproximada por uma normal (**F**)

b) $T = 10 + \exp(\bar{X})$ é uma estatística (**V**)

c) Quanto maior n, menor a variância de qualquer estatística T (assumindo que a variância existe) (**F**)

d) $P(X_1 > x) = 1 - P(X_2 \leq x)$ qualquer que seja x (**V**)

Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.

6. Sejam A e B dois acontecimentos definidos no mesmo espaço de resultados Ω. Mostre que se $P(A) = 0.7$ e $P(B) = 0.4$, então A e B não podem ser incompatíveis.

RESPOSTA: Suponhamos que A e B são incompatíveis. Então, $A \cap B = \varnothing$, e consequentemente $P(A \cap B) = 0$. Por outro lado, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.7 - 0 = 1.1 > 1$, o que é absurdo pois para qualquer acontecimento $C \subset \Omega$ tem-se que $0 \leq P(C) \leq 1$. Conclui-se que A e B não podem ser incompatíveis.

7. Mostre que, existindo $\text{Var}(X)$ e sendo c uma constante, então $\text{Var}(c\ X) = c^2\ \text{Var}(X)$.

RESPOSTA: Por definição, para qualquer v.a. Y tem-se $\text{Var}(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2]$, onde $\mu_Y = E[Y]$. Assim, como $E[cX] = cE[X] = c\mu_X$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(cX) &= E[(cX - c\mu_X)^2] \\
&= E[c^2(X - \mu_X)^2] \\
&= c^2\ E[(X - \mu_X)^2] \\
&= c^2\ \text{Var}(X)
\end{aligned}$$

FIM DA 1.ª PARTE **VSFF**

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 2.ª Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

Cotação:

1.a)	b)	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
10	20	10	20	10	20	10	20

1. Na sua deslocação habitual de mota para o ISEG, o João passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada um deles se apresentar verde à sua passagem é 0.4 para o primeiro e 0.5 para o segundo. Admita que este estudante chega a tempo do começo da primeira aula se, e só se, pelo menos um dos dois semáforos se apresentar verde à sua passagem.

a) Em três deslocações ao ISEG, qual a probabilidade de o João encontrar o primeiro semáforo verde na primeira viagem mas não nas outras duas. (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☒ **i)** 0.1440 ☐ **ii)** 0.0518 ☐ **iii)** 0.0864 ☐ **iv)** 0.0311

b) Num dia em que o João chega a tempo do começo da primeira aula, qual a probabilidade de ter encontrado o primeiro semáforo verde?

RESPOSTA 1.b) Definam-se os acontecimentos $A =$ "primeiro semáforo verde"; $B =$ "segundo semáforo verde". Tem-se $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ e, por independência, $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$. A probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(A \mid A \cup B) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \quad \text{por definição} \\ &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad \text{pois } A \subset A \cup B \\ &= \frac{4}{7}\ . \end{aligned}$$

2. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = 1 - x^{-2}\ , \quad x > 1\ .$$

a) A mediana de X é dada por (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☐ **i)** 2 ☐ **ii)** 1/2 ☒ **iii)** $\sqrt{2}$ ☐ **iv)** $\sqrt{2}/2$

b) Determine $P(X > 3 \mid X < 5)$.

RESPOSTA 2.b) Tem-se que

$$\begin{aligned}
P(X > 3 \mid X < 5) &= \frac{P(3 < X < 5)}{P(X < 5)} \quad \text{por definição} \\
&= \frac{P(3 < X \leq 5)}{P(X \leq 5)} \quad \text{pois } X \text{ é contínua} \\
&= \frac{F(5) - F(3)}{F(5)} \\
&= \frac{1 - 5^{-2} - (1 - 3^{-2})}{1 - 5^{-2}} \\
&= 2/27\ .
\end{aligned}$$

3. O número de pessoas atendidas ao balcão de um serviço público segue um processo de Poisson de taxa média 0.25 por minuto.

a) Na primeira hora de funcionamento do balcão, qual a probabilidade de serem atendidas menos de 11 pessoas? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☐ **i)** 0.6641 ☐ **ii)** 0.3632 ☐ **iii)** 0.2676 ☒ **iv)** 0.1185

b) Considere 9 tempos entre atendimentos consecutivos. Determine a probabilidade de o menor deles ser superior a 5 minutos.

RESPOSTA 3.b) Designem-se esses tempos (em minutos) por X_i, $i = 1, \ldots, n$, onde $n = 9$. Sabemos que, pelas propriedades do processo de Poisson, $X_i \sim \text{Ex}(0.25)$. A probabilidade pedida é $P(X_{(1)} > 5)$. Assumindo a indepedência dos X_i, tem-se que $X_{(1)} \sim \text{Ex}(0.25n)$. Assim,

$$P(X_{(1)} > 5) = 1 - P(X_{(1)} \leq 5) = 1 - [1 - \exp(-0.25n \times 5)] \approx 1.3 \times 10^{-5} \ .$$

4. Admita que a duração em minutos de uma canção *pop* é bem modelada por uma distribuição normal de média 3.5 e desvio padrão 0.5.

a) Que percentagem das canções *pop* tem uma duração superior a 2.25 minutos? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☐ **i)** 97.72% ☐ **ii)** 84.13% ☒ **iii)** 99.38% ☐ **iv)** 93.32%

b) Para um segmento de 30 minutos de um programa de rádio, o locutor escolhe 8 canções *pop* ao acaso. Calcule a probabilidade de o locutor conseguir passar todas as canções que escolheu.

RESPOSTA 4.b) Designe-se a duração (em minutos) das canções escolhidas por Y_i, $i = 1 \ldots, n$, $n = 8$. Sabemos que $Y_i \sim \mathrm{N}(3.5, 0.5^2)$. Como os Y_i são independentes, $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathrm{N}(n \times 3.5, n \times 0.5^2)$. Assim, a probabilidade pedida é

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq 30\right) = \Phi\left(\frac{30 - n \times 3.5}{\sqrt{n \times 0.5^2}}\right) \approx 0.92135 \ .$$

FIM